Module M136 : Épreuve d'Analyse 4

Durée : 2h

L'épreuve comprend 3 parties indépendantes.
Chaque partie doit être rédigée sur un cahier d'examen à part.

Partie I

Exercice 1 (6 points)
Soit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définies par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\ln(nx)}.$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction f_n.
2. Soit $a > 1$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement et uniformément sur l'in
valle $[a, +\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera.
3. Montrer que la série de terme général f_n converge simplement vers une fonction F
$x > 1$.

On note $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.

4. Montrer que la série $\sum_n f_n$ converge uniformément vers F sur $]1, +\infty[$ (Utiliser le res
5. Montrer que F est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.

Exercice 2 (3 points)
Soit f la fonction complexe définie par :

$$f(z) = \frac{z^2 e^{-iz}}{(z-i)^2},$$

et soit $I = \int_{\gamma^+} f(z)dz$. Où γ^+ est le cercle de centre O et de rayon $R = \frac{3}{2}$.

1. Calculer I de deux façons différentes (par le théorème des résidus, puis en utilisant l'i
grale de Cauchy).
2. Soit $g(z) = \frac{f(z)}{z^2}$. Donner le développement en série de Laurent de g au voisinage de

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia

Module M136 : Épreuve d'Analyse 4

Durée : 2h

L'épreuve comprend 3 parties indépendantes.
Chaque partie doit être rédigée sur un cahier d'examen à part.

Partie II

Exercice 3 (7 points)
Soit f la fonction, de période 2, définie par

$$f(x) = 1 - |x|, \quad \forall x \in [-1, 1[.$$

1. Dessiner la courbe de f sur l'intervalle $[-3, 3]$?
2. Calculer la série de Fourier $S_f(x)$ de f.
3. Étudier les convergences simple et uniforme de la série de Fourier de f.
4. Calculer la valeur de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

En déduire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Université Hassan II de Casablanca
Faculté des Sciences et Techniques Mohammedia

Département de mathémat

01 juin

Module M136 : Épreuve d'Analyse 4

Durée : 2h

L'épreuve comprend 3 parties indépendantes.
Chaque partie doit être rédigée sur un cahier d'examen à part.

Partie III

Exercice 4 (5 points). On se propose de calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+n^2+n+1}{n!} z^n; \quad z \in \mathbb{C}.$$

1. Quel est le rayon de convergence de cette série.
2. Démontrer qu'il existe des réels α, β, γ et δ tels que

$$X^3 + X^2 + X + 1 = \alpha + \beta X + \gamma X(X-1) + \delta X(X-1)(X-2).$$

$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = \\ \gamma = \\ \delta \end{cases}$

3. En déduire que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad S(z) = P(z)e^z,$$

où $P(z)$ est un polynôme de degré 3 que l'on explicitera.